



TITLE:

平面クエット流の不安定周期解と乱流遷移 (乱流の解剖: 構造とはたらきの解明)

AUTHOR(S):

河原, 源太

CITATION:

河原, 源太. 平面クエット流の不安定周期解と乱流遷移 (乱流の解剖: 構造とはたらきの解明). 数理解析研究所講究録 2004, 1406: 14-23

ISSUE DATE:

2004-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/26107>

RIGHT:

平面クエット流の不安定周期解と乱流遷移

京都大工 河原 源太 (Genta Kawahara)

1. はじめに

2枚の平行平板が互いに異なる一定速度で平行に運動する場合に形成される非圧縮粘性流は、平面クエット流とよばれる。この流れは最も基本的な壁面剪断流のひとつであり、これまでにその層流状態の不安定性と乱流への遷移、あるいは発達した乱流状態に関する数多くの研究が行われてきた。

層流平面クエット流は任意の有限レイノルズ数において線形安定であるので (Romanov 1973), 層流解の不安定化および層流解からの解の分岐過程によって流れの複雑化や乱流遷移を理解することはできない。したがって、遷移過程の解明には必然的に層流解の非線形擾乱に対する不安定性、あるいはナビエ・ストークス方程式の (層流解とは異なる) 非線形解を議論しなければならない。そのためこの流れの乱流遷移の問題は難問とされてきたが、最近の永田 (1990) による3次元非線形定常解の発見を契機に、乱流遷移過程の解明が進みつつある。

回転平面クエット系では、非回転の場合とは異なり層流解は安定性を失い、回転率のゼロからの増加にしたがって基本層流解から縦渦解 (2次元定常解) が分岐し、さらには縦渦解から波状縦渦解 (3次元定常解) が分岐する。永田 (1990) は回転平面クエット系での波状縦渦解を非回転状態に接続し、平面クエット流の非線形解を求めることに成功した。非回転状態のみを見れば、永田 (1990) の解はサドル・ノード分岐によって有限レイノルズ数で突然現われることになる。この解が現われるレイノルズ数は解の流れ方向とスパン方向の周期によって異なり、その最小値は $Re = 125$ 程度であることが報告されている (永田 1990)。ここに $Re = Uh/\nu$ であり、 U は2平板の速度差の半分、 h は平板間距離の半分、 ν は運動粘性率である。

一方、非線形擾乱に対する平面クエット流の不安定性は様々な実験により調べられており、精密な実験が行われるにつれ非線形臨界レイノルズ数の実測値は低下する傾向にある。最近の Dauchot & Daviaud (1995) の実験では非線形臨界レイノルズ数が $Re = 325 \pm 5$ と見積られている。彼らの実験では、平板の微小な孔から噴流が流れに導入され、この擾乱が持続する噴流速度の最小値が測定された。この最小値は、レイノルズ数の減少とともに増加し、臨界レイノルズ数 $Re = 325 \pm 5$ において無限大となることが示唆された。臨界レイノルズ数の値は擾乱の導入方法に依存するので、本来は様々な擾乱に対する臨界レイノルズ数の最小値が重要であるが、上記の値も乱流遷移が起こるレイノルズ数の目安として意味のある知見である。Bottin & Chaté (1998) の実験では、乱流状態から突然レイノルズ数を一定値にまで下げ、その後の乱れの持続時間を統計的に調べ

た。彼らは、乱れがある時間以上持続する確率分布関数が指数的な裾をもつことを示し、平均持続時間が $Re = 323 \pm 2$ で無限大に発散することを示唆する結果を報告している。この臨界レイノルズ数 $Re = 323 \pm 2$ 以下での分布関数の指数的な裾の存在は、乱流遷移（ストレンジ・アトラクターの発生）に先立つストレンジ・リペラー（Kantz & Grassberger 1985）の出現を予想させる。Schmiegel (1999) は、永田 (1990) の非線形定常解以外に複数の定常解を求め、永田の解および新たに彼が得た解、さらにはそれらから分岐した解からなる不安定解間のホモクリニック接続を発見し、接続された複雑な不安定軌道とストレンジ・リペラーの出現との関連づけを試みている。

本稿では、最近見つけられた平面クエット流の不安定周期解（河原・木田 2001）を、レイノルズ数を下げながら追跡した結果を報告したい。この周期解は、乱流中に認められるストリークや縦渦といった秩序構造の生成・再生成サイクルをうまく再現し、低次の乱流統計量にきわめて近い統計性質を有する。したがって、この周期解の出現は、上述したクエット流の乱流遷移の問題との密接な関連性をもつものと期待される。第2章では流れの概要と、不安定な周期解を求める数値計算法を手短に説明する。第3章では計算された周期解の性質、特にそのレイノルズ数依存性および周期解の出現について議論する。第4章では本研究で得られた知見をまとめる。

2. 流れの概要と数値計算

本研究では距離 $2h$ 離れた2平行平板間における運動粘性率 ν の非圧縮粘性流体の運動を考える。平板に平行な方向に x 軸、平板に垂直な方向に y 軸を取り、 z 軸を x, y 軸に垂直かつ座標系 (x, y, z) が右手系をなす向きにとる。座標系の原点を2枚の平板の中間面上にとる。上平板 $y = +h$ （下平板 $y = -h$ ）は x 軸の正（負）の方向に一定の速さ U で運動する。以下では代表長さを h 、代表時間を移流時間スケール h/U 、代表圧力を ρU^2 にとり、諸量を無次元化する。 ρ は流体の密度である。レイノルズ数を $Re = Uh/\nu$ と定義する。 ν と壁面摩擦速度 $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ を用いて諸量を壁変数として規格化する場合には、上付きの $+$ を付すことにする。ここに τ_w は（平均）壁面剪断応力である。

この流れの支配方程式はナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

と連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

である。ここに $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は速度、 p は圧力であり、壁面での速度に対するすべりなし条件は

$$u(y = \pm 1) = \pm 1, \quad v(y = \pm 1) = w(y = \pm 1) = 0 \quad (2)$$

である。

この方程式系は層流解 $(u, v, w) = (y, 0, 0)$ をもつ。また、この系の3次元定常解が永田 (1990) により求められている。この3次元定常解は、流れ方向とスパン方向の空間周期性（各方向の周期を L_x, L_z とする）と、2種類の空間対称性

$$(u, v, w)(x, y, z) = (u, v, -w)(x + L_x/2, y, -z),$$

$$(u, v, w)(x, y, z) = (-u, -v, w)(-x, -y, z + L_z/2)$$

を有する。この対称性は乱流状態においても自律的に現れることが Coughlin, Jiménez & Moser (1994) および河原・木田 (2001) により観測されている。そこで、本研究ではこの対称性をもつ周期解を考えることにする。

式 (1) の回転の y 成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{Re} \nabla^2\right) \omega_y = -e_y \cdot [\nabla \times (u \cdot \nabla) u] \quad (3)$$

となり、式 (1) の回転を2回とり式 (2) を考慮すると、その y 成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{Re} \nabla^2\right) \nabla^2 v = e_y \cdot [\nabla \times \nabla \times (u \cdot \nabla) u] \quad (4)$$

となる。ここに $\omega \equiv \nabla \times u = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ は渦度を表し、 e_y は y 方向の単位ベクトルである。本研究では、式 (3), (4) および平板に平行な面内での流れ方向速度の平均 $\bar{u}(y, t)$ に対する方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \bar{u}v + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (5)$$

を基礎方程式とする（対称性より $\bar{w} = 0$ である）。ここに $\overline{(\cdot)}$ は平板に平行な面内での平均を表す。方程式 (3), (4), (5) の境界条件は、すべりなし条件 (2) および非圧縮条件から

$$\omega_y(y = \pm 1) = v(y = \pm 1) = \frac{\partial v}{\partial y}(y = \pm 1) = 0, \quad \bar{u}(y = \pm 1) = \pm 1 \quad (6)$$

となる。

基礎方程式の空間的な離散化にはスペクトル法を用いる。流れ (x) 方向とスパン (z) 方向には周期 L_x あるいは L_z の周期境界条件を課して従属変数をフーリエ展開し、壁垂直 (y) 方向にはチェビシェフ多項式展開を用いる。ただし、チェビシェフ多項式 $T_l(y)$ は境界条件 (6) を満足しないので、ここでは境界条件を満足する多項式として、 ω_y および $\bar{u} - y$ に対して

$$\phi_{2l}(y) = T_{2l}(y) - T_0(y),$$

$$\phi_{2l+1}(y) = T_{2l+1}(y) - T_1(y)$$

($l = 1, 2, 3, \dots$), v に対して

$$\psi_{2l}(y) = T_{2l}(y) + (l^2 - 1)T_0(y) - l^2 T_2(y),$$

$$\psi_{2l+1}(y) = T_{2l+1}(y) + \frac{1}{2}(l^2 + l - 2)T_1(y) - \frac{1}{2}(l^2 + l)T_3(y)$$

($l = 2, 3, \dots$)を用いる (McFadden, Murray & Boisvert 1990) .

不安定周期解の数値計算では, N 次元相空間 (\bar{u} , v , ω_y のフーリエ・チェビシェフ係数の総数を N とする) におけるポアンカレ断面 $\text{Im}(\bar{\omega}_{y0,2,1}) = \text{const.}$ 上でポアンカレ写像

$$\eta_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}; Re, L_x, L_z) \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (7)$$

の不動点 $\eta_i = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) をニュートン法により求める. ここに $\text{Im}(\bar{\omega}_{y0,2,1})$ は, 流れ方向波数がゼロ, チェビシェフ多項式の次数が 2, スパン方向波数が $2\pi/L_z$ の壁垂直方向渦度のフーリエ・チェビシェフ係数の虚数部を表す. ξ_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) は $\text{Im}(\bar{\omega}_{y0,2,1})$ を除く, \bar{u} , v , ω_y の全フーリエ・チェビシェフ係数を表す. ポアンカレ写像 (7) は基礎方程式 (3), (4), (5) を数値積分することによって得られる. この数値積分には藤の擬スペクトル法による直接数値シミュレーションコードを用いる (藤・板野 2001 参照). ニュートン反復における写像 (7) のヤコビ行列 $\partial f_i / \partial \xi_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, N-1$) を有限差分を用いて近似する. ニュートン法の初期推定データには河原・木田 (2001) の周期解を用いる. ニュートン反復の収束判定条件を

$$\frac{\sum_{i=1}^{N-1} (\eta_i - \xi_i)^2}{\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2} < 10^{-7}$$

のように設定する. 以上の数値計算を 4,352 点 (x , y , z 方向に $16 \times 17 \times 16$) の格子点上で行う. レイノルズ数 $Re = 400$, 周期箱寸法 $(L_x, L_z) = (1.755\pi, 1.2\pi)$ の場合, 格子間隔は $\Delta x^+ = 11.7$, $\Delta y^+ = 0.65 - 6.63$, $\Delta z^+ = 8.00$ 程度であり, 代表的な平行平板間乱流の直接数値シミュレーション (Kim, Moin & Moser 1987) と同程度の空間分解能を有する.

3. 不安定周期運動

図 1 は, レイノルズ数 $Re = 400$ でミニマルクエット乱流が観測されている値 $(L_x, L_z) = (1.755\pi, 1.2\pi)$ (Hamilton, Kim & Waleffe 1995, 河原・木田 2001) に周期箱寸法を固定して, Re を変化させながら追跡した周期解の周期を示す. 図 1 から, 周期解がレイノルズ数 $Re = Re_{SN} (\simeq 321)$ においてサドル・ノード分岐により現れることがわかる. $Re > Re_{SN}$ では上分枝 (長周期) 解と下分枝 (短周期解) 解が存在する. これらの分枝は複雑な振舞いを示し, サドル・ノード分岐点

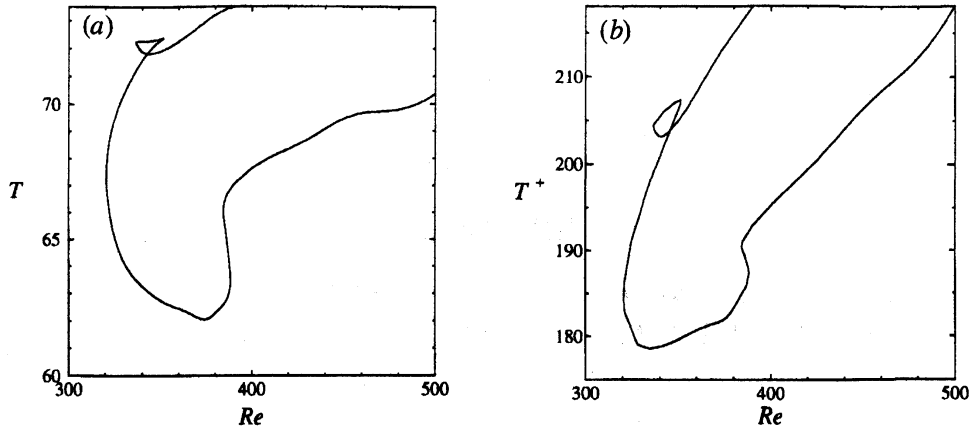


図 1. 周期解の時間周期 (a) T および (b) T^+ とレイノルズ数の関係. $(L_x, L_z) = (1.755\pi, 1.2\pi)$.

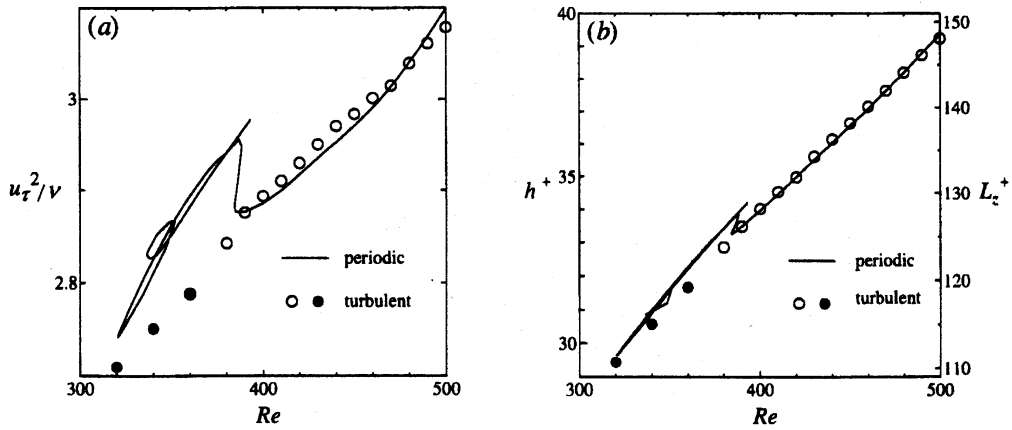


図 2. (a) 壁面剪断率 u_τ^2/ν および (b) 平板間距離の半分 h^+ とスパン方向周期 L_z^+ のレイノルズ数依存性. $(L_x, L_z) = (1.755\pi, 1.2\pi)$.

($Re \simeq 321$) から解をたどると、解のレイノルズ数は単調には増加せず、両分枝ともいったんレイノルズ数が減少した後再び増加している。 h/U で規格化した周期 T はおよそ 70 であり、 ν/u_τ^2 で規格化した周期 T^+ は 200 程度である。 T^+ のオーダーは、高レイノルズ数ミニマル平面クエット乱流に対する壁面平均剪断率の周波数スペクトルに見られる支配的時間スケール (≈ 400) と同程度である (Jiménez *et al.* 2004)。ホップ分岐やホモクリニック分岐といった平衡解からの本周期解の分岐は現時点では確認されていない。

図 2 (a), (b) に図 1 の周期解の平均壁面剪断率 u_τ^2/ν および (ν/u_τ で規格化された) 平板間距離の半分 h^+ 、スパン方向周期 L_z^+ のレイノルズ数依存性をそれぞれ示す。たとえ L_z (あるいは L_x) の値が固定されていても、 Re に依存して u_τ が変化するため L_z^+ (あるいは L_x^+) は変化することに注意する。白丸と黒丸は同

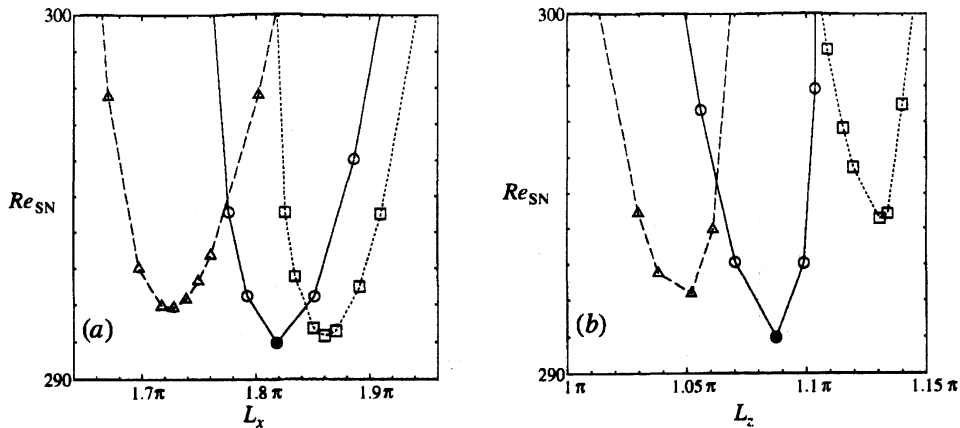


図 3. サドル・ノード分岐による周期解の出現レイノルズ数 Re_{SN} と (a) L_x および (b) L_z の関係. (a) $L_z = 1.05\pi$ (三角), 1.09π (丸), 1.10π (四角) における L_x 依存性. (b) $L_x = 1.71\pi$ (三角), 1.82π (丸), 1.95π (四角) における L_z 依存性.

一の L_x と L_z の値に対して計算された乱流状態での対応する値を示す. ただし, Re_{SN} に近い低レイノルズ数における黒丸では, 初期値によっては乱流状態が持続せず遷移的な振舞いが観測された. 周期解の出現レイノルズ数 Re_{SN} 近傍の $Re = 320$ では, 長時間乱流状態が持続する場合のほうがむしろまれであった. 周期解の出現レイノルズ数付近で乱流の遷移的な振舞いが認められることは, 周期解の出現と乱流遷移との関連性を示唆する結果として興味深い. 図 1 の周期解の下分枝における壁面剪断率そして h^+ (および L_z^+) は, $Re \gtrsim 390$ すなわち下分枝に見られる転回レイノルズより高いレイノルズ数で, 同一周期箱寸法のミニマルクエット乱流の結果と非常によい一致を示す.

サドル・ノード分岐により周期解が出現するレイノルズ数 Re_{SN} は, 流れ方向周期 L_x とスパン方向周期 L_z に依存する. そこで, L_x および L_z を変化させて Re_{SN} の最小値を探索した結果, Re_{SN} が $(L_x, L_z) \simeq (1.82\pi, 1.09\pi)$ に対して最小値 $Re_{SN} \simeq 291$ をとることが明らかになった [図 3 (a), (b) 中の黒丸を参照]. ただし, この最小値が局所的なものか大域的なものかについては今後の検討を要する. 最小レイノルズ数 $Re_{SN} \simeq 291$ では周期解の周期は $T^+ \simeq 201$ であり, 解の空間寸法は $h^+ \simeq 27$, $(L_x^+, L_z^+) \simeq (155, 93)$ である (図 4 中の黒丸を参照). この高さ $h^+ \simeq 27$ は線形底層と緩和層からなる壁乱流の粘性層厚さ ($\approx 30\nu/u_\tau$) と同程度であり, スパン方向周期 $L_z^+ \simeq 93$ は広く観測されている壁近傍ストリークのスパン方向間隔 ($\approx 100\nu/u_\tau$) に近い. この最小レイノルズ数よりわずかに高いレイノルズ数 $Re = 300$ において, 一方の空間周期 L_z (あるいは L_x) を最小レイノルズ数に対する値 $L_z = 1.09\pi$ (あるいは $L_x = 1.82\pi$) に固定して, もう一方の空間周期 L_x (あるいは L_z) を変化させながら周期解を追跡した結果を図 4 に示す. 図 4 か

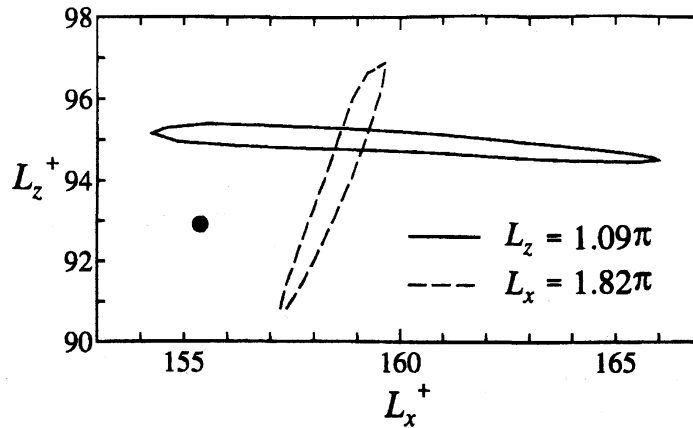


図4. 周期解の流れ方向周期 L_x^+ とスパン方向周期 L_z^+ の関係. 実線（あるいは破線）は $Re = 300$ において L_x （あるいは L_z ）を固定して L_z （あるいは L_x ）を変化させて得られたものである. 最小レイノルズ数 $Re_{SN} \approx 291$ を与える平板平行方向周期 (L_x^+, L_z^+) も黒丸で示されている.

ら周期解の存在は平板平行方向周期 $L_x^+ \approx 154 - 166$, $L_z^+ \approx 91 - 97$ の範囲に限定されていることがわかる. ミニマル乱流では計算領域のスパン方向周期をストリークのスパン方向間隔 ($\approx 100\nu/u_\tau$) より小さくすると乱流が持続しないことが知られている (Jiménez & Moin 1991; Hamilton, Kim & Waleffe 1995). また, 計算領域のスパン方向周期をストリーク間隔の2倍 ($\approx 200\nu/u_\tau$) にし, ランダムな初期条件から計算を行うと自発的に2本のストリークが現れることが観測されている (Hamilton, Kim & Waleffe 1995). 平板平行方向周期の限定された範囲にのみ周期解が存在することは, ストリークをはじめとする壁近傍の秩序構造の空間スケールの選択機構に深くかかわるものと考えられる. 高レイノルズ数になると, 周期解の平板平行方向周期 L_x^+ および L_z^+ の存在範囲の上限はずっと大きくなり, 様々な空間スケールをもった構造が周期運動中に現れるものと考えられる. また, 平面クエット流の定常解において観測されているように (Waleffe 2003), スパン方向に2倍の周期 ($\approx 200\nu/u_\tau$) をもつ低調波型の新たな解が現れるものと予想される. なお, ここで示した秩序構造の長さスケールと周期解の空間周期との一致に加え, 同様の一致が平面ポアズイユ流の進行波解 (Waleffe 2003) や平面クエット流の定常解 (Waleffe 2003; Jiménez *et al.* 2004) においても報告されていることを付記する.

周期解のRMS速度 u'^+ , v'^+ , w'^+ の分布を壁からの距離 y^+ に対して図5に示す. 図中の太線は周期解が出現する最小レイノルズ数 $Re_{SN} \approx 291$ での分布を表し, 白と黒のシンボルは $(L_x, L_z) = (1.755\pi, 1.2\pi)$ での下分枝 (短周期) 解 ($Re = 400$) と上分枝 (長周期) 解 ($Re = 393$) に対する分布をそれぞれ表す. また, 周期箱寸法 $(L_x^+, h^+, L_z^+) = (1008, 160, 252)$ の平面クエット乱流 ($Re = 3000$) の対応する

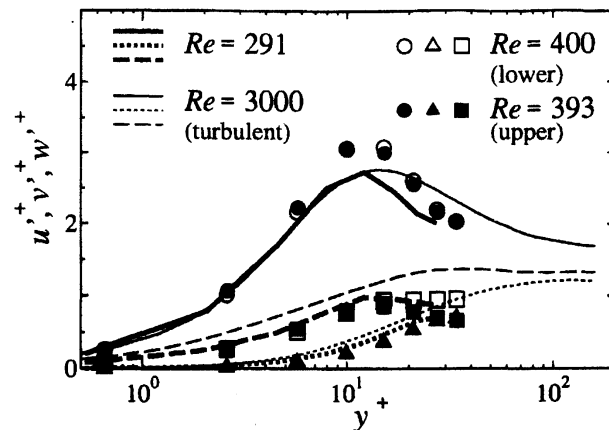


図5. RMS速度 u'^+ , v'^+ , w'^+ と壁からの距離 y^+ の関係. 丸および実線は流れ方向 RMS 速度, 三角と点線は壁垂直方向 RMS 速度, 四角と破線はスパン方向 RMS 速度を表す.

データも細線で示す. 丸および実線は流れ方向 RMS 速度, 三角と点線は壁垂直方向 RMS 速度, 四角と破線はスパン方向 RMS 速度を表す. 最小レイノルズ数 $Re_{SN} \simeq 291$ における周期解の RMS 速度は, $Re = 393$ および 400 における周期解の結果と類似している. 異なるレイノルズ数あるいは異なる分枝に対する周期運動の時空間構造を可視化したところ, レイノルズ数や分枝の違いによらずそれらが定性的に同一の回帰的振舞い (ストリークと縦渦の生成・消滅を表す再生成サイクル) を示すことが確認された. 図5に示す周期解のすべての RMS 速度は, より高レイノルズ数のクエット乱流の RMS 速度と粘性層 ($y^+ \lesssim 30$) において定性的に一致している. 最小レイノルズ数 $Re_{SN} \simeq 291$ において出現する周期運動が, 出現の当初から高レイノルズ数のクエット乱流と同様の統計性質をもつことは興味深い.

ポアンカレ写像 (7) の不動点上で評価されたヤコビ行列の固有値 (フロケ乗数) は, 周期解と同一の空間周期性と空間対称性を有する無限小擾乱に対する周期解の安定性を表す. この周期解のフロケ乗数を, $(L_x, L_z) = (1.755\pi, 1.2\pi)$ に対して $Re \leq 400$ での周期解の上分枝 (長周期), 下分枝 (短周期) において計算したところ, 絶対値が 1 より大きい不安定固有値の数は 2 つから 4 つであることが明らかになった. 最大不安定固有値の絶対値は $O(10)$ であった. 図6に, 周期解が出現する最小レイノルズ数 (サドル・ノード分岐点) 近傍 $Re_{SN} \simeq 291$ [$(L_x, L_z) \simeq (1.82\pi, 1.09\pi)$] の上分枝 (長周期) 側での周期解のフロケ乗数を示す. 周期解はサドル・ノード分岐点の上分枝 (長周期) 側では単位円外の正負の実軸上にそれぞれ 1 つ (合計 2 つ) の不安定固有値をもつ. サドル・ノード分岐点 (最小レイノルズ数) ではこのうちの正の実軸上の固有値のほうは単位円上に位置することになり, さらに下分枝 (短周期) 側に移行するとそれは単位円内に入

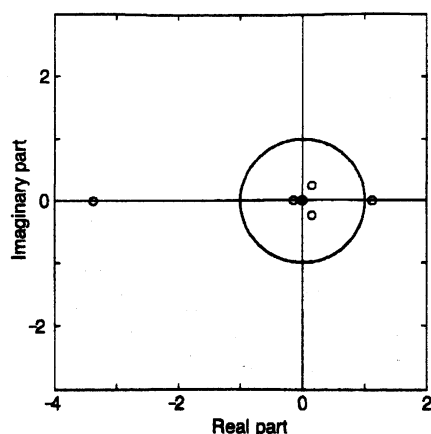


図 6. 最小レイノルズ数近傍 ($Re_{SN} \simeq 291$) での周期解の線形擾乱に対する安定性. サドル・ノード分岐点のわずかに上分枝 (長周期) 側での結果. 周期解のフロケ乗数の実数部と虚数部が横軸と縦軸にとられている. 単位円外部で不安定, 単位円内部で安定となる. $(L_x, L_z) \simeq (1.82\pi, 1.09\pi)$.

り不安定固有値の数は負の実軸上の1つのみになる. この負の実軸上の不安定固有値は低調波不安定に対応する. いずれにせよ, 周期解はその出現直後から不安定である. 以上からこの周期解が不安定であることが確認できるが, $Re \approx 400$ 程度の比較的低レイノルズ数では相空間における不安定多様体の次元は非常に低い. したがって, 低レイノルズ数において乱流状態にある系は頻繁に不安定周期軌道に接近し, その結果乱流の時空間秩序や統計性質がこの不安定周期解によりうまく表現できることになる.

4. まとめ

本稿では平面クエット乱流の壁近傍における秩序構造の生成・再生サイクルおよびその統計性質を再現する不安定周期解 (河原・木田 2001) を高精度で再計算し, そのレイノルズ数依存性や周期運動の出現について検討を加えた. 不安定周期運動はサドル・ノード分岐によって現れ, 分岐の最小レイノルズ数 $Re \approx 290$ まで周期解が存在する. $Re \approx 290$ では周期解の空間寸法, すなわち平板間距離の半分は $h^+ \simeq 27$ で, スパン方向周期は $L_z^+ \simeq 93$ であり, それぞれちょうど粘性層厚さ (≈ 30) とストリーク間隔 (≈ 100) に対応する長さスケールをもつ. この最小レイノルズ数は, 前述した平面クエット流の非線形臨界レイノルズ数 $Re \approx 320$ に近い値をとっている. この値より高いレイノルズ数では層流状態に導入されたある種の有限振幅擾乱が持続し (Dauchot & Daviaud 1995), あるいはこの値より低いレイノルズ数では乱流は維持されない (Bottin & Chaté 1998). 出現時の周期解の空間寸法がちょうど壁近傍乱流の代表長さスケールに相当し, かつ周期解の出現レイノルズ数と非線形臨界レイノルズ数の値が近いことは, 本稿で

議論した不安定周期運動の出現が平面クエット流の乱流遷移に密接に関連することを示唆している。

文献

- Bottin, S. & Chaté, H. 1998 Statistical analysis of the transition to turbulence in plane Couette flow. *Eur. Phys. J. B* **6**, 143.
- Coughlin, K., Jiménez, J. & Moser, R. 1994 Instability of streamwise vortices in plane channel flows. *Proceedings of 1994 Summer Program, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ.*, 229.
- Dauchot, O. & Daviaud, F. 1995 Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow. *Phys. Fluids* **7**, 335.
- Hamilton, J.M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317.
- Jiménez, J., Kawahara, G., Simens, M.P., Nagata, M. & M. Shiba. 2004 Characterization of near-wall turbulence in terms of equilibrium and 'bursting' solutions. *Phys. Fluids*. In press.
- Jiménez, J. & Moin, P. 1991 The minimal flow unit in near wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 221.
- Kantz, H. & Grassberger, P. 1985 Repellers, semi-attractors, and long-lived chaotic transients. *Physica D* **17**, 75.
- Kawahara, G. & Kida, S. 2001 Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.* **449**, 291.
- Kim, J., Moin, P. & Moser, R. 1987 Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **177**, 133.
- McFadden, G.B., Murray, B.T. & Boisvert, R.F. 1990 Elimination of spurious eigenvalues in the Chebyshev tau spectral method. *J. Comput. Phys.* **91**, 228.
- Nagata, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519.
- Romanov, V.A. 1973 Stability of plane-parallel Couette flow. *Functional Anal. Appl.* **7**, 137.
- Schmiegel, A. 1999 Transition to turbulence in linearly stable shear flows. PhD thesis, Philipps-Universität Marburg.
- Toh, S. & Itano, T. 2001 On the regeneration mechanism of turbulence in the channel flow. *Proceedings of IUTAM Symp. on Geometry and Statistics of Turbulence.*, Kluwer, 305.
- Waleffe, F. 2003 Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows. *Phys. Fluids* **15**, 1517.